3. Énoncés des exercices

Exercice 5.1 Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b (si possible "à la main").

1. $a = 67$ et $b = 7$
2. $a = 413$ et $b = 10$
3. $a = 1007$ et $b = 314$

Exercice 5.2 On considère l'égalité suivante :

$$23 \times 51 + 35 = 1208$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 1208 par 51 ?
2. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 1208 par 23 ?

Exercice 5.3
1. Justifier que $n-1$ divise $n^3 - n^2$ et $n^2 - 1$.
   En déduire que $n-1$ divise $n^3 - 1$.
2. Effectuer la division de $n^3 - 1$ par $n - 1$

Exercice 5.4 On considère deux entiers naturels a et b et on note respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$, avec $0 \leqslant r < b$.

1. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $-a$ par b ?
2. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $-a$ par $-b$?

Indices : 1) Distinguer les cas $r = 0$ *et* $r \neq 0$ *; dans ce dernier cas, remarquer que* $b(-q) - r = b(-q) - b + b - r$
2) S'inspirer de la question 1).

Exercice 5.5 Un critère de primalité.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier quelconque par 6 ?
2. En déduire, par disjonction des cas, que tout nombre premier différent de 2 ou 3 peut s'écrire sous la forme $6n + 1$ ou $6n - 1$
3. En déduire (à la calculatrice) tous les nombres premiers inférieurs à 100.

Exercice 5.6 Parmi les cinq entiers suivants, indiquer ceux qui sont congrus modulo 7 :
$a = -4$; $b = 15$; $c = 3$; $d = 38$; $e = -13$

Exercice 5.7 On considère quatre entiers relatifs a, b, c et d, et un entier naturel non nul n. Démontrer que :

1. Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$, alors $a + c \equiv b + d\,[n]$
2. Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$, alors $ac \equiv bd\,[n]$

Exercice 5.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrer que : si $a \equiv b\,[n]$, alors, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, $a^p \equiv b^p\,[n]$

Exercice 5.9 On considère deux entiers a et b tels que $a \equiv 7\,[10]$ et $b \equiv 6\,[10]$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $n \equiv a + b\,[10]$, et le plus petit entier naturel m tel que $n \equiv ab\,[10]$.

Exercice 5.10
1. Compléter : $10 \equiv ...\,[9]$; $100 \equiv ...\,[9]$, et en déduire $234 \equiv ...\,[9]$
2. Que vaut 10^n modulo 9 ? Donner, en le justifiant, un critère de divisibilité du nombre $\overline{a_n ... a_1 a_0}$ par 9, où a_0 est le chiffre des unités, a_1 celui des dizaines, etc....
3. Trouver un critère de divisibilité par 11 et en démontrer la validité.

Exercice 5.11 On se propose de déterminer les couples $(n; m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation $7^n - 3 \times 2^m = 1$; on note (F) cette relation.

1. On suppose $m \leqslant 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples de solutions.
2. On suppose maintenant que $m > 5$.
   (a) Montrer que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1\,[32]$

(b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si la couple $(n;m)$ vérifie la relation (F), alors n est divisibles par 4

(c) En déduire que si le couple $(n;m)$ vérifie la relation (F), alors $7^n \equiv 1\,[5]$

(d) Pour $m > 5$, existe-t-il des couples $(n;m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

(e) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F)

Exercice 5.12 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et :
$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que dans un repère du plan, les points de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 4x_n + 2$
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est un entier naturel.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est un entier naturel.
3. (a) Montrer que x_n est divisible par 3 ssi y_n est divisible par 3

   (b) Montrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils n'ont pas de facteur premier commun dans leur décomposition en produit de facteurs premiers.
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3